


Formas de determinar el valor de las opciones


Ricardo A. Fornero
Profesor Titular Administración Financiera
de la Facultad de Ciencias Económicas
de la Universidad Nacional de Cuyo.

1. Introducción

Las opciones, esos títulos de uso múltiple en las estrategias de inversión, presentan numerosas facetas para su valoración. Las soluciones matemáticas propuestas para analizar los factores que impulsan el valor del derecho en el mercado tienen diversas limitaciones, si bien proporcionan aproximaciones del peso relativo de esos factores.

Frente a la ampliación del mercado de opciones que se ha producido en Argentina a partir del segundo semestre de 1991 (si bien en un contexto de muy alta volatilidad de precios de los títulos), parece interesante analizar algunas herramientas para relacionar las variables que influyen en el valor de una opción. También debemos tener en cuenta el hecho de que, al disminuir significativamente los costos de transacción de los títulos, los resultados de los modelos de valoración comienzan a ser más adecuados para el análisis de las decisiones sobre opciones.

En este ensayo se presentan las características prácticas de la aplicación de un modelo muy difundido de valoración de opciones sobre instrumentos financieros. Para ello será necesario examinar los principales determinantes de valor del derecho, de los cuales resultan indicadores para las decisiones. Si bien el modelo y algunas de sus variantes está totalmente programado para el análisis de inversiones, es importante exponer sus principales supuestos y condiciones, así como la forma de interpretar los datos a utilizar y la información que proporciona ese cálculo.

Este análisis supone nociones básicas sobre las principales carac-

terísticas de las opciones y el alcance de las operaciones sobre estos derechos (para una familiarización inicial puede verse Apreda, 33/58; Gordon Davis; Alende. Un resumen sistemático puede verse en Fornero, 1990, 90/97).

No se incluyen comentarios sobre estrategias de inversión con opciones (para esto puede verse Caes, 1990). Tampoco se exponen los fundamentos de la valoración matemática (puede consultarse Hull, 1989, especialmente 80/133).

2. Variables fundamentales de valoración

Valorar una opción (como cualquier otro título) significa determinar el precio del derecho que debe prevalecer en el mercado, según la información disponible para quien realiza la valoración. En función de tal valor y del precio existente el inversor toma sus decisiones de transacción. Para realizar la valoración es preciso identificar las variables que intervienen en el comportamiento del precio del derecho, establecer su desenvolvimiento esperado y aplicar un modelo de relaciones. El modelo, a su vez, supone una específica conducta de mercados e inversores. Frecuentemente se adopta la perspectiva del inversor especulativo con mercados en equilibrio. Hay implícita una condición de ajuste por arbitraje, ya que los precios reflejan las negociaciones según expectativas sobre las variables significativas del mercado; y debe pensarse que esas transacciones se llevan efectivamente a cabo, eliminando en cada ajuste la posibilidad de ganancia por arbitraje. El modelo de valoración pretende reproducir aquello que consideran los inversores en sus evaluaciones, y que por ello se representará en los precios.

Son deseables las valoraciones fundamentales analíticas, es decir, aquellas que establecen una ecuación explícita de valor del derecho, poniendo el precio en función de las variables identificadas.

De esta forma se satisface la necesidad real de evaluar con frecuencia la relación entre valor teórico y precio actual del título, así como contar con medidas rápidas de sensibilidad a los cambios en las variables de valor (frente a la alternativa de valoración numérica o iterativa).

Pero como las situaciones de valoración de opciones son bastante complejas debe recurrirse a una simplificación de relaciones y variables que permita obtener una ecuación de solución explícita; tal compromiso, por lo general, produce sesgos en esa valoración con fórmulas. Así se explica la difusión entre los negociadores de opciones de las formulaciones derivadas del planteo de Black-Scholes a partir de una posición permanentemente compensada, si bien es difícil que existan en realidad las condiciones supuestas; y, por ende, es claro que se cometerán errores de evaluación. (Véase Fornero, 1989, 22/29; Geske & Roll)

¿Cuáles son las variables que influyen en el precio del derecho en

cada momento? Las principales son:

P = Precio de mercado al contado del título originario

K = Precio de ejercicio de la opción

n = Plazo hasta la fecha de ejercicio (comparable con t)

i = Tasa de interés para operaciones de corto plazo

D = Monto de dividendos en efectivo en el intervalo $(0, n)$

a) Precio y fecha de ejercicio. De estas variables, tanto el precio de ejercicio (K) como la fecha límite de ejercicio (y por tanto el plazo n contado desde hoy, el momento de evaluación) se conocen con certeza.

b) Precio de mercado del título originario. El precio del título tendrá una evolución esperada en el intervalo $(0, n)$. Si todos los factores relevantes están reflejados en el precio actual, basta considerar la volatilidad del título. El precio P en cada momento es una función de una variable conocida, el precio actual, y una volatilidad estimada. Este es el supuesto habitual en las formulaciones. Aparecen entonces:

A = Precio actual del título originario

σ = Dispersión del rendimiento del título (el rendimiento es la relación de dos precios del título)

La variabilidad con frecuencia se considera extraída de una distribución normal de los rendimientos. Existen varias formulaciones de distribuciones alternativas, que complican en diverso grado el modelo de valoración. (Puede verse Jarrow & Rudd)

Si hay razones para pensar que existen elementos no reflejados en el precio actual A , en la evolución del mismo interviene también el efecto en el rendimiento esperado de estos factores, y no sólo la dispersión del rendimiento. (Acercas de las diferencias de expectativas sobre la volatilidad del rendimiento del título y su efecto en el cálculo puede verse Rubinstein.)

c) Tasa de interés. La tasa de interés vigente en el período es en sí misma una variable aleatoria, y suelen existir diferencias entre la tasa de prestar y de tomar prestado. No obstante, en las formulaciones más simples se considera que la tasa de interés es conocida con certeza para el horizonte de decisión, y que no existen diferencias entre la tasa de prestar y tomar prestado. (Véase Gilster & Lee para los efectos de esta diferencia)

d) Dividendos. Los dividendos y rentas intervienen en la valoración porque, cuando son en efectivo, pertenecen al poseedor del título en el momento de la puesta a disposición. Por ello, si se ejercita la opción antes de que el título cotice ex-cupón corresponden al titular de la opción. De lo contrario son retenidos por el lanzador (en una operación cubierta). Aun cuando se cono-

ca con certeza el monto del dividendo (que no es siempre el caso), debe establecerse el efecto esperado del dividendo en el precio ex-cupón. Esto porque no necesariamente el precio ex-cupón es el precio del título con cupón menos el dividendo o renta. Tenemos así otro elemento de precio, que parece útil incorporar al factor "dividendo":

α es la proporción del dividendo en que disminuirá el precio después del corte de cupón; es la parte del dividendo que desaparecerá al cobrarse esa renta;

$(1 - \alpha)$ es el efecto renta, por factores tales como costos de transacción, diferencias impositivas, que ya está reflejado en el precio por la misma existencia de esa renta esperada.

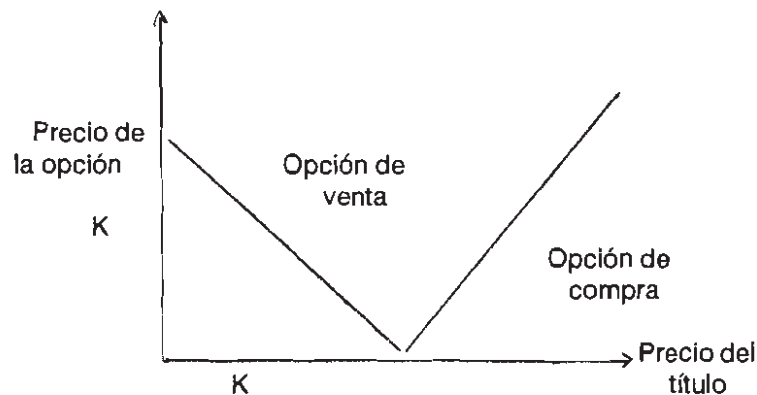
Por ejemplo, la experiencia puede indicar que para determinadas acciones la caída técnica por dividendo en efectivo es el 90% del dividendo. Esto debe medirse en el comportamiento de la acción respecto al mercado, y se superpone a cualquier otro efecto originado en el propio anuncio del dividendo.

La protección de las opciones frente a dividendos en acciones y otras distribuciones de títulos (por conversión, capitalización de ajustes, etc.) pueden afectar también la valoración. Tales distribuciones (en función de efecto técnico en el precio del título) son depuradas redefiniendo las cantidades de títulos o de opciones equivalentes a las de la situación antes de la distribución. Pero el efecto real en el precio puede ser distinto, por preferencias de división de acciones, revisión de expectativas de distribución en efectivo, etc. En rigor podría pensarse que cualquier diferencia entre la equivalencia técnica y el efecto que se observará en el precio de mercado del título deriva de factores no reflejados en el precio actual, y por ello deben incluirse al considerar el rendimiento esperado del título y su variabilidad.

Si en un mercado existiese una protección de las opciones también para los efectos de dividendos en efectivo el modelo debería incluir el efecto de la protección; por ejemplo, si ella consiste en la disminución del precio de ejercicio por el monto completo del dividendo, debe tenerse en cuenta el factor en la valoración.

3. Relaciones básicas de valor

Una opción de compra tiene valor si el precio de ejercicio es menor que el precio del título en el momento de ejercicio; una opción de venta tiene valor si existe la situación inversa. Se advierte fácilmente que el valor límite del derecho (obviamente, en la posición de titular) es el indicado en la ilustración 1, para un determinado precio de ejercicio K y un plazo n hasta el ejercicio.



1. Límite inferior del valor de una opción

Es claro que si la evaluación se realiza en cualquier momento del intervalo $(0, n)$, y no en la fecha final de ejercicio, la comparación es efectiva respecto al valor actual del precio de ejercicio, a la tasa de interés existente. De esto surge la ecuación básica de valor, en el momento t (entre 0 y n):

$$\text{Opción de compra} \quad C = \text{MAX} [P - K/(1+i)^{n-t}; 0] \quad \text{Ec (3.1)}$$

$$\text{Opción de venta} \quad V = \text{MAX} [K/(1+i)^{n-t} - P; 0] \quad \text{Ec (3.2)}$$

Así, con un precio de ejercicio de 20 y un precio actual del título de 18 una opción de compra vale 0 en el momento de ejercicio, y una opción de venta vale 2. El valor técnico límite, 30 días antes de ese momento, debe considerar el valor actual del precio de ejercicio. Con una tasa de interés de 2% para ese período el precio de ejercicio tiene un valor actual de 19,61. Con el precio de 18 para el título, la opción de venta no puede valer menos que 1,61.

El precio P puede ser el precio actual (A), o bien el precio actual corregido por el valor de los dividendos o rentas en efectivo disponibles en el momento d (entre 0 y n) (es el precio ex-cupón del título):

$$P = A - \alpha D / (1+i)^d \quad \text{Ec (3.3)}$$

Las ecuaciones 3.1 y 3.2 reflejan un límite inferior de valor del derecho. La valoración analítica pretende reflejar los factores que ubican el precio por encima de este límite, estableciendo una línea de valoración. Si el precio está por encima o por debajo de esta línea corresponde vender o comprar.

En realidad, excepto en los modelos más simplificados, lo que se establece es una banda dentro de la cual debería ubicarse el precio correcto para la perspectiva del decididor. (Puede verse Perrakis & Ryan; Perrakis; Ritchen & Kuo).

En los puntos siguientes se analizan las valoraciones derivadas con los límites que pueden considerarse estándar en términos teóricos, es decir, los procesos de valoración tipo Black-Scholes.

Resumiendo: en el precio de mercado se reflejan las expectativas

prevalcientes sobre las variables determinantes. La posición de decisión del poseedor de una opción (de compra o de venta) en cada momento es:

- (a) mantener el derecho
- (b) transferir el derecho a su precio de mercado
- (c) ejercer el derecho

Su decisión depende de las relaciones entre:

- * precio esperado del título subyacente hasta la fecha de ejercicio
- * precio actual del derecho
- * tasa de interés esperada hasta la fecha de ejercicio
- * dividendos esperados y efecto en el precio del título

Veamos cómo se consideran estos elementos en un modelo de valoración. Si los decididores utilizan este modelo el valor determinado tiene efecto en sus decisiones, y por ello en el precio del derecho.

4. Opción de compra

El valor del derecho depende de elementos adicionales a los indicados en las ecuaciones 3.1 y 3.2, según vimos en el punto 2. Ello puede influir significativamente en esa valoración, al punto que cambie el sentido del valor asignado, es decir, que la opción tenga valor en el mercado aunque con la relación básica el mismo debiera ser cero. Para resolver esta situación de modo analítico se toma la perspectiva del inversor especulativo que forma una cartera sin riesgo, compensada (hedged) con títulos con riesgo (por ejemplo acciones) y opciones. El rendimiento de esta cartera (y por ende su valor de mercado) debería ser igual al de un título sin riesgo (entendiendo por riesgo la variabilidad del rendimiento esperado). Black & Scholes formularon la ecuación general de valor de la opción como equivalente de esta posición compensada.

Una posición compensada de opciones y títulos que se ajusta de modo continuo (para que se mantenga la característica de cartera sin riesgo) equivale a (es una réplica de) un título sin riesgo. Su valor de equilibrio es el que proporciona un rendimiento igual a la tasa sin riesgo (i). El costo de mantener el título es igual a la tasa sin riesgo.

La estrategia de compensación existe como posibilidad que asegura ese equilibrio. Parecería que nadie tomará una posición compensada, que promete (con más trabajo) un rendimiento igual a la tasa sin riesgo del mercado. Pero si los precios de acciones y opciones están fuera de equilibrio aparecen expectativas de obtener con su combinación una ganancia superior a la tasa sin riesgo. Esto lleva a un arbitraje entre esos mercados, hasta que se restablece el equilibrio de precios. Este argumento de

no-arbitraje es utilizado en muchos modelos de valoración.

Hay varias formas de plantear la noción de compensación de la cartera. Un título sin riesgo puede ser replicado por la compra de una acción y el lanzamiento de tantas opciones de compra sobre ella como para compensar la posición. O por la venta de una acción y la adquisición de titularidad de las opciones de compra que compensen el riesgo.

Esta posición debe mantenerse compensada durante todo el plazo del derecho. Las opciones compensan exactamente la volatilidad del rendimiento de las acciones para una cierta proporción de opciones por acción. Y esto, frente a un determinado precio del título, es válido para una específica cantidad de opciones de compra. Por ejemplo, una posición corta en acciones puede requerir ser titular de 3 opciones de compra por cada 2 acciones que se han vendido (y cuyo producido tiene un rendimiento alternativo, o un costo evitado, igual a la tasa de interés sin riesgo) a fin de compensar totalmente el riesgo por variaciones. Pero los cambios en precios pueden llevar la relación a 4 cada 2, o sea 2 opciones por cada acción. Esto significa que para mantener la equivalencia a un título sin riesgo debería comprarse una opción adicional.

Este ajuste continuo puede ser poco observable, si no directamente imposible, cuando existen costos de transacción. Pero se pueden incluir los efectos de un ajuste posible de posición en el modelo de valoración.

Veamos ahora la fórmula de Black-Scholes. Para una opción de compra de tipo europeo de un título que no tenga dividendos o rentas en efectivo, el valor B-S es:

$$C = A N1(b) - K e^{-in} N1(b - \sigma\sqrt{n}) \quad \text{Ec (4.1)}$$

donde $N1(b)$ indica la función de densidad acumulada de una distribución normal de una variable con límite b

$$b = [\ln(A/K) + (i + 0.5 \sigma^2) n] / \sigma\sqrt{n} = [\ln(A/Ke^{-in}) + 0.5 \sigma^2 n] / \sigma\sqrt{n}$$

i y σ son tasas instantáneas de interés y de variación de rendimiento, respectivamente (Recordemos que en una opción de tipo europeo el derecho sólo puede ejercerse en la fecha final estipulada. Se diferencia del tipo americano aplicado en el mercado argentino, donde el derecho puede ejercerse en cualquier momento hasta la fecha final.)

Vemos que se reconoce el hecho de que la incertidumbre sobre el precio del título afecta el valor de la opción, ubicándolo por encima del valor básico según ecuación 3.1. Aquí aparece el precio esperado de modo explícito (si bien con ciertos supuestos de comportamiento). Se observa en la ecuación 4.1 que el valor de la opción de compra responde al esquema básico. El primer término implica una corrección del precio del título con la probabilidad de que sea mayor que el precio de ejercicio; el segundo es el

valor actual del precio de ejercicio, corregido por la correspondiente probabilidad.

A su vez, la razón de compensación viene dada por el comportamiento del precio de la opción. La cantidad de opciones de compra por cada título base es

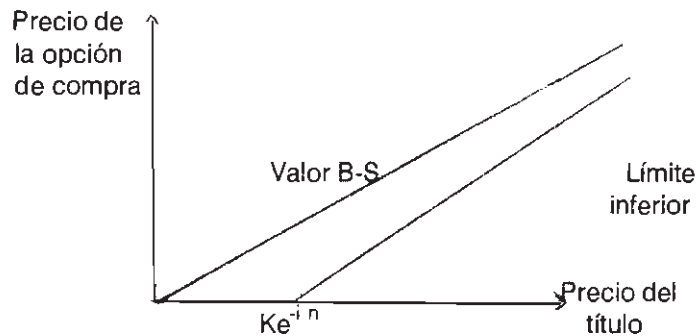
$$q = 1 / (\partial C / \partial P)$$

donde $\partial C / \partial P$ = cambio en el precio de la opción al cambiar el precio del título (medido como derivada parcial).

El valor C determinado en ecuación 4.1 es válido sólo si, frente a las modificaciones de C y de P, se mantiene la posición compensada para esos nuevos valores. Es decir, se va también modificando la proporción de opciones y acciones en la cartera.

La ecuación 4.1, aunque de aspecto complicado, resulta muy operativa. "Entre todas las teorías financieras, el modelo de valoración de opciones de Black/Scholes quizá ha sido la de mayor impacto en el mundo real de las transacciones de títulos. Virtualmente todos los participantes del mercado conocen el modelo y lo usan en sus decisiones. Los académicos prueban con regularidad la valoración resultante del modelo con los precios reales de mercado, y en general concluyen que, si bien no tiene en cuenta todos los aspectos, el modelo trabaja muy bien al explicar los precios observados de las opciones" (Figlewski, 1289)

En la ilustración 2 se muestra la línea de valoración B-S, superpuesta al gráfico de la ilustración 1. (Pueden verse comentarios más detallados sobre ella, por ejemplo, en Brealey y Myers, 490/498).



2. Líneas de valor de la opción de compra

Las condiciones establecidas en el modelo (sobre precios, costos y compensación) reducen el espacio de fluctuación del precio de la opción a una línea de valor. Si se ubica por encima o por debajo aparecen oportunidades de arbitraje que lo llevan a esa línea. Se obtiene una definición no difusa del precio, lo cual no quiere decir que sea efectivamente exacta sino que se han establecido condiciones muy restrictivas de funcionamiento de

los mercados.

Por eso el proceso de arbitraje implica que las posiciones pueden ajustarse con los criterios de optimización de inversiones que se supone siguen los inversores. Ya veremos que al incluir el elemento fáctico "costos de transacción" reaparece la banda de fluctuación de precios, aunque mucho más reducida que en el caso de los valores límite básicos.

El hecho de aplicar esta solución para opciones americanas se basa en que, si no existen dividendos, no es conveniente el ejercicio del derecho antes de la fecha final (Smith): la incertidumbre tiene un efecto básico, cual es la conservación del derecho o su transferencia, más que su ejercicio. Así se simplifica bastante la valoración analítica del caso americano.

5. Cálculo de la opción de compra

¿Cómo se aplica la ecuación 4.1? En primer lugar debemos determinar las tasas de volatilidad y de interés en forma apropiada. El uso de tiempo continuo está justificado por el hecho que los precios se ajustan por decisiones de cambio de posición de todos los inversores del mercado. Pero requiere cierta precisión en el uso de los datos.

La volatilidad del rendimiento del título (cambios en precios) puede estimarse con base diaria. Veamos un ejemplo. Contamos con los precios de cierre diarios en un determinado mes (ver columna 1 del cuadro de ilustración 3) ajustados por dividendos y otras modificaciones. Calculamos la variación de precio (columna 2) y determinamos la tasa de acumulación continua implícita para el período diario i (entre 1 y 21).

$$\begin{aligned} \text{Como } P_j &= P_{j-1} e^{r_j} \\ r_j &= \ln(P_j / P_{j-1}) \end{aligned} \quad \text{Ec (5.1)}$$

La tasa diaria de rendimiento se indica en columna 3 de ilustración 3.

Con esto es posible determinar la volatilidad anualizada de ese rendimiento en el período 1 a v , que es sencillamente la dispersión estadística. Se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\sigma = \left\{ \sqrt{[1/(v-1)] \sum r_j^2 - [1/(v(v-1))] (\sum r_j)^2} \right\} / \sqrt{w} \quad \text{Ec (5.2)}$$

donde la expresión entre llaves es la volatilidad diaria, y w es el tamaño del intervalo expresado en años. En este caso debemos considerar los días hábiles (aproximadamente 250), y por eso $w = 1/250$.

3. Precios y volatilidad de un título

Día Número	Precio de cierres (1)	Variación (P _j / P _{j-1}) (2)	Tasa continúa ln [(2)] (3)	Tasa continúa al cuadrado (4)
1	5.95			
2	5.60	0.9412	-0.0606	0.0037
3	5.35	0.9554	-0.0457	0.0021
4	6.15	1.1495	0.1394	0.0194
5	6.15	1.0000	0.0000	0.0000
6	6.00	0.9756	-0.0247	0.0006
7	5.65	0.9417	-0.0601	0.0036
8	5.15	0.9115	-0.0927	0.0086
9	5.05	0.9806	-0.0196	0.0004
10	5.10	1.0099	0.0099	0.0001
11	4.70	0.9216	-0.0817	0.0067
12	4.47	0.9511	-0.0502	0.0025
13	4.91	1.0984	0.0939	0.0088
14	5.05	1.0285	0.0281	0.0008
15	4.85	0.9604	-0.0404	0.0016
16	4.63	0.9546	-0.0464	0.0022
17	4.51	0.9741	-0.0263	0.0007
18	4.96	1.0998	0.0951	0.0090
19	5.35	1.0786	0.0757	0.0057
20	5.35	1.0000	0.0000	0.0000
21	5.38	1.0056	0.0056	0.0000
		Σ	-0.1007	0.0765

En nuestro ejemplo,

$$v = 21$$

$$(\sum r_j^2) = -0,1007$$

$$(\sum r_j)^2 = 0,0765$$

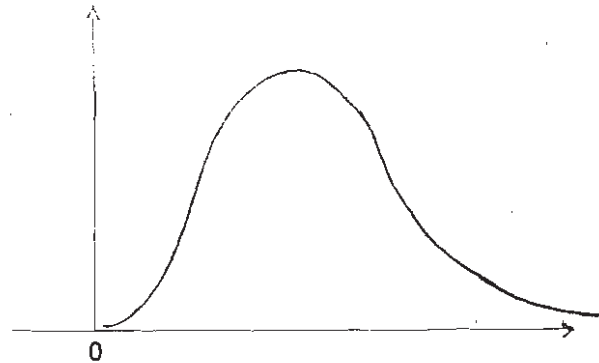
$$\sqrt{w} = 1 / \sqrt{250} = 0,0632$$

de donde

$$\sigma = 6,17\% \text{ diario} / 0,0632 = 97,6\% \text{ anual}$$

es la volatilidad anualizada en forma continúa, a partir de las observaciones de precios. Esto significa que durante setiembre 1991 el precio de Celulosa tuvo movimientos que implicaron una variabilidad anualizada del rendimiento de casi 100%. Es sin duda una volatilidad alta. Esta incertidumbre del precio del título debe aumentar el valor de la opción sobre el mismo.

del período que estamos considerando. La ilustración 4 muestra la distribución logarítmica normal (log-normal).



4. Distribución lognormal del precio

Como determinamos el rendimiento por las variaciones del precio, que dependen justamente de ese comportamiento logarítmico normal, una estimación de los parámetros de la distribución del rendimiento continuo nos proporciona la dispersión anualizada del rendimiento que calculamos según ecuación 5.2. La ilustración 5 muestra la distribución de probabilidad de la tasa de rendimiento según los datos del cuadro 3. La estimación del rendimiento diario promedio con la muestra de 21 días es

$$\bar{r} = \text{Media} - (\text{Variancia}/2) = (-10,07\% / 21) - (6,17\% / 2) = -0,67\%$$

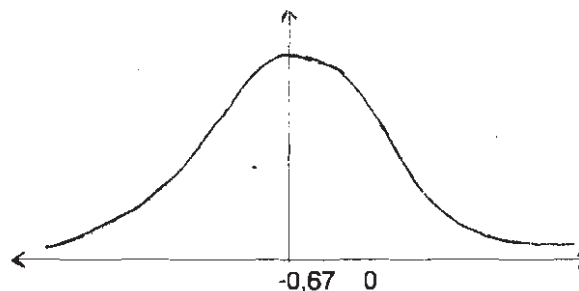
con dispersión $\sigma = 6,17\%$ según el cálculo anterior.

La ecuación 4.1 nos indica cuál debería ser el valor de una opción en estas condiciones. Por ejemplo, el 01/10/91 el precio de la acción (A) es 5,70. Existían opciones con ejercicio en diciembre a distintos precios. Consideremos el siguiente contrato:

Precio de ejercicio (K) = 4

Fecha límite ejercicio 17/12/91, es decir, $n = 77$ días o 0,211 años

El inversor que analiza la operación puede pensar que la volatilidad



5. Distribución del rendimiento

se mantendrá en el nivel de setiembre, $\sigma = 97,6\%$ anual. La tasa de interés de corto plazo que considera es 18% anual (también continua). Con estos elementos podemos calcular

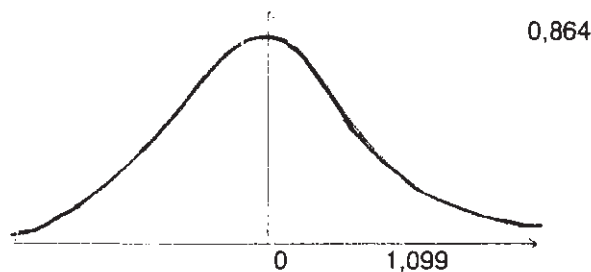
$$b = \frac{\ln(5,70 / 4 \times e^{-0,18 \times 0,211}) + 0,5 \times 0,976^2 \times 0,211}{0,976 \times \sqrt{0,211}} = 1,099$$

En ecuación 4.1 vemos que la probabilidad asociada a la variación del precio actual hasta la fecha de ejercicio viene dada por la densidad acumulada de una distribución normal hasta el valor de b . Para $b = 1,099$ es $N(b) = 0,864$, o sea la magnitud bajo la normal desde $-\infty$ hasta 1,099, según vemos en ilustración 6 (recordemos que toda el área bajo la curva suma 1). (Este es un valor obtenido por aproximación polinómica; si se utilizan tablas será bastante similar.)

Calculemos el otro factor

$$b - \sigma \sqrt{n} = 1,099 - 0,976 \times \sqrt{0,211} = 0,651$$

$$y \ N(b - \sigma \sqrt{n}) = N(0,651) = 0,742$$



6. Valores de la distribución normal

Aplicando la ecuación 4.1 el valor de esa opción es

$$C = 5,70 \times 0,864 - 4,00 \times e^{-0,18 \times 0,211} \times 0,742 = 2,06$$

Observemos que el cálculo se realiza con el tiempo n expresado en años con divisor 365 para días corridos hasta el ejercicio. Por eso se usa el mismo tiempo para la tasa de interés, que es efectivamente en días corridos, y para la volatilidad del rendimiento del título, que determinamos en días hábiles. Esto supone una distribución pareja de los días feriados en el año. Si el plazo hasta el ejercicio es muy corto este supuesto puede introducir distorsiones.

En las operaciones del día considerado el precio del derecho fluctuó entre 2,05 y 2,25, y cerró a 2,20, para un volumen de contratos que permite considerar representativos tales valores.

El precio en alza (de 5,38 a 5,70) impulsó el valor del derecho quizá por revisión de volatilidad (si esa tasa de interés de 18% se mantuvo como pertinente para la evaluación). Para el precio de cierre de 2,20 la volatilidad implícita es 120% en lugar de 97,6%

Veamos qué pasa con los contratos que tienen otros precios de ejercicio para la misma fecha. En el cuadro 7 se establecen los valores, calculados en forma similar a la ejemplificada.

7. Opciones de compra de celulosa 01/10/91

Precio de ejercicio	Fecha de ejercicio	Valor al cierre	Valor B-S calculado $\sigma = 97,6\%$ $i = 18\%$	Volatilidad implícita B-S $i = 18\%$
4,00	DIC 91	2,20	2,06	120%
5,00	DIC 91	1,50	1,44	105%
6,00	DIC 91	1,05	0,98	105%
7,00	DIC 91	0,75	0,66	106%
8,00	DIC 91	0,60	0,44	114%

Hemos utilizado la variabilidad observada del rendimiento del título como estimador de la volatilidad del mismo que influye en el valor de la opción; esta es la única forma de estimar esa volatilidad esperada? Sin duda que no. Se puede introducir información adicional disponible en el momento de la medición de la volatilidad del título. Cuando el inversor considera que la volatilidad futura será distinta a la observada es preciso considerar tal medición en la valoración.

Alternativamente puede utilizarse como estimador de la volatilidad esperada del título la volatilidad implícita en el precio de mercado del derecho. En cuadro 7 (última columna) vimos que esta volatilidad puede ser distinta para cada derecho sobre el mismo título (con distinto precio o fecha de ejercicio). Ella refleja las expectativas sobre el título prevaletentes en las transacciones que se consideran. Si se utiliza como estimador debe contrastarse con la volatilidad esperada por el inversor. Porque lo que da impulso al valor del derecho es la volatilidad del título: esperada por cada inversor, y en el mercado en conjunto. Justamente las diferencias de expectativas sobre esta volatilidad (así como las tasas de interés pertinentes) son las que hacen aparecer situaciones de sobre o subvaluación del derecho para cada inversor.

En nuestro ejemplo podemos preguntarnos qué pasó después. Calculando la volatilidad del título durante octubre vemos que, curiosamente, coincide casi con exactitud con la del mes anterior, 97,6%. Es decir, en las condiciones de nuestro cálculo la mayor volatilidad implícita respecto a la que utilizamos como estimador, que aumentaba los valores del derecho, no fue corroborada. Las opciones estaban efectivamente sobrevaluadas, por lo

menos para el modelo de decisión que estamos utilizando, y en el período transcurrido.

Pero ¿nuestro modelo incluye todos los factores pertinentes? Si bien no existen dividendos en efectivo (para los cuales el modelo tal como lo hemos planteado no es válido), parece importante incluir los efectos de los costos de transacción sobre los títulos y las opciones. Veamos una solución relativamente sencilla, dentro del modelo B-S.

6. Efecto de los costos de transacción

Cuando existen costos de transacción el ajuste continuo puede ser una estrategia inalcanzable, y por lo tanto no efectiva en el proceso de mercado del cual surge el valor del derecho (como supone el modelo B-S).

Esto significa que en esa situación el precio de la opción será distinto al resultante de la ecuación 4.1 de un modo sistemáticamente dependiente de la magnitud de esos costos y de la cantidad de revisiones necesarias durante el período. Las oportunidades de arbitraje con posiciones compensadas son distintas según sea la magnitud de estas variables, porque influyen en los precios netos o ajustados que los inversores enfrentan en sus operaciones.

El efecto de los costos de transacción es la suma de dos componentes:

- (1) costos de mantener la posición compensada
- (2) costos de entrada y salida de la posición compensada

6.1 Mantenimiento (rebalance). Los costos que derivan de las transacciones que "rebalancean" la cartera compensada dependen del en que se realicen las revisiones Δt (diario, semanal, etc.) y de las modificaciones requeridas para mantener la posición compensada. Una forma de evaluar esto es utilizar una variancia revisada en la ecuación 4.1 (Leland, 1288/1292):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \sigma^2 [1 + \phi E|\Delta P/P| / \sigma^2 \Delta t] \\ &= \sigma^2 [1 + \sqrt{(2/\tau)} \phi / \sigma \sqrt{\Delta t}] \quad \text{Ec (6.1)}\end{aligned}$$

ya que si $\Delta P/P$ se distribuye de modo normal con media cero,

$$E|\Delta P/P| = \sqrt{(2/\tau)} \sigma \sqrt{\Delta t}$$

donde

ϕ es el coeficiente de costos de transacción de la opción

Con esto se obtiene el valor \bar{C} de la opción resultante de una estrategia de compensación que incluye los costos de transacción re-

queridos para mantener la posición sin riesgo. Esta forma de cálculo es una extensión del efecto de los costos de transacción en el precio del título: cuando existen costos de transacción el precio neto de compra es más alto que el precio de mercado y el precio neto de venta es más bajo. La brecha implica movimientos acentuados del precio, que pueden interpretarse como una mayor variabilidad.

El valor revisado es mayor que el C simple de ecuación 4.1, y refleja el precio del derecho para la magnitud pertinente de costos de transacción (inversor marginal). Sólo a ese precio es posible una estrategia de inversión equivalente entre títulos con y sin riesgo y opciones de compra; el mismo cubre al lanzador de los costos de compensar su posición, con la frecuencia dada por el intervalo Δt . La diferencia entre ambos precios de la opción es la magnitud del efecto de los costos de transacción.

Los costos de transacción son proporcionales de modo directo al coeficiente de costo θ y de modo inverso a la raíz cuadrada del intervalo de revisión. También influye el hecho de que el precio de ejercicio actualizado sea mayor o menor que el precio del título, porque habrá un impacto menor o mayor, respectivamente, de los costos de transacción (que se origina en la cantidad de rebalances requeridos).

Pero el límite inferior no es la línea B-S básica (ilustración 2). Los costos de transacción llevan a un precio del derecho más bajo que el de esa línea, para que sea conveniente una estrategia de réplica inversa. Esta consiste en comprar la opción y "deshacerla", vendiendo el título originario y comprando uno de rendimiento sin variabilidad. Con un precio del derecho por debajo del límite inferior se obtiene un rendimiento, después de costos de transacción, mayor que la tasa de interés sin riesgo.

El límite inferior de precio, C se evalúa aplicando la ecuación 4.1 con la variancia $\underline{\sigma}^2$,

$$\underline{\sigma}^2 = \sigma^2 \cdot \sqrt{(2/\tau)} \phi \sigma \sqrt{\Delta t} \quad \text{Ec (6.2)}$$

En resumen, ambos límites de precio son oportunidades de arbitraje hacia y desde las opciones, y por ello desaparecen rápidamente en el mercado: el precio de la opción se mantiene entre ellos, y la amplitud de la diferencia depende de las relaciones entre los componentes fundamentales del valor de la opción (P, K, σ , n, i).

6.2 Entrada y salida. Estos costos dependen de la posición inicial del inversor. Si no se tiene el título, entrar en la posición compensada implica a) costos de compra o venta del título, y b) lanzamiento o compra de las opciones correspondientes. Además, c) si la opción tiene valor hoy implica que la diferencia esperada $P_n - K$ es positiva: al momento de ejercicio se incurrirán en costos sobre el precio de ejercicio, que deben actualizarse.

El costo total de entrada y salida es la suma de estos tres elementos:

$$\phi^* P + \phi C^* / \frac{\partial C}{\partial P} + \phi^* K e^{-i n} \quad \text{Ec (6.3)}$$

donde

C^* es el precio vigente de la opción

ϕ^* es el coeficiente de costos de transacción del título

ϕ es el coeficiente de costos de transacción de la opción

Si se parte de una posición en que el inversor ya posee el título, y en lugar de venderlo *lanza opciones* y mantiene una posición compensada frente a las oscilaciones del precio, el costo se reduce. No existe el costo de compra (no es un costo incremental para la posición compensada), y al final en realidad se produce un ahorro, ya que en lugar de existir el costo sobre el precio del título (al venderlo) el costo se calcula sobre el precio de ejercicio (que es menor, al menos ex-ante). El valor actual de la diferencia $P_n - K$ es el valor de la opción. Por tanto, el costo total en este caso es

$$\phi C^* / \frac{\partial C}{\partial P} - \phi^* C^* \quad \text{Ec (6.4)}$$

Con ecuaciones 6.3 y 6.4 hemos obtenido una aproximación a los límites superior e inferior del costo de entrada y salida.

Una posición descubierta, por ejemplo, implica un costo para el lanzador que puede estimarse en el doble del segundo término de ecuación 6.3. En efecto, el costo de entrada a la posición es ese término, y para salir lo adecuado es realizar un bloqueo cuyo costo puede medirse hoy como igual al de entrada. (En realidad este costo puede determinarse con más precisión considerando la probabilidad de que el precio del título esté por encima del precio de ejercicio, y deba bloquearse la posición con un precio más alto del derecho).

Lo mismo pasa en las posiciones largas en opciones de compra. Si se tiene el título hay que venderlo, entrar en la posición en opciones y después realizar el ejercicio. Si no se tiene el título la opción es una compra financiada, e intervienen el costo de entrada en opciones y el costo derivado del ejercicio (los dos últimos términos de la ecuación 6.3).

Se advierte que este elemento de costo es muy fluctuante, dentro de los dos extremos. La posición de cada participante lo lleva a realizar transacciones dentro de la banda de fluctuación de los valores del derecho según los costos de transacción pertinentes.

6.3 Consecuencias en los valores de nuestro ejemplo. Al considerar estos efectos en nuestro ejemplo de Celulosa podremos establecer con mayor exactitud si efectivamente las opciones estaban sobrevaluadas.

Primero veamos qué pasa con la volatilidad. Podemos aplicar las ecuaciones 6.1 y 6.2 para determinar los límites del valor de la opción. Pensemos que la revisión "continua" relevante es de 2 veces por semana. En términos anuales, $\Delta t = 1/104$. Si los gastos de transacción son 2%, por ecuación 6.1

$$\sigma = \sqrt{0,976^2(1 + (2/\tau)0,02/0,976 \sqrt{(1/104)})} = 105\%$$

Con un cálculo similar determinamos la variabilidad revisada para el límite inferior: 89%

En el cuadro 8 se muestran los valores de la opción resultantes de aplicar la ecuación 4.1 con los datos ya vistos y la volatilidad revisada.

8. Opciones de Celulosa 01/10/91 Gastos Transacción 2%

Precio de ejercicio	Fecha de ejercicio	Valor al cierre	Valor Rev Lím Supe $\sigma = 105\%$ $i = 18\%$	Valor Rev Lím Infer $\sigma = 89\%$ $i = 18\%$	Valor B-S Básico $\sigma = 97,6\%$ $i = 18\%$
4,00	DIC 91	2,20	2.11	2.02	2.06
5,00	DIC 91	1,50	1.51	1.37	1.44
6,00	DIC 91	1,05	1.06	0.89	0.98
7,00	DIC 91	0,75	0.74	0.57	0.66
8,00	DIC 91	0,60	0.51	0.36	0.44

Con esto vemos el efecto de los gastos de transacción por *rebalance de la cartera*. Analicemos los *gastos de entrada y salida*. Consideremos también un 2% para simplificar, y pensemos en una posición de titular sin títulos existentes (costo intermedio de entrada y salida para la opción), los últimos dos términos de ecuación 6.3.

Debemos determinar la cantidad de opciones por título en la cartera compensada. La razón de compensación $\partial C / \partial P$ puede calcularse con una aproximación lineal: Cambio C / Cambio P.

Esto es válido para cambios pequeños en el precio; por ejemplo, entre 5,60 y 5,80 (el precio vigente es 5,70). ¿Cuánto cambia el valor de la opción? Con la volatilidad de 105% y el precio de ejercicio de 8, si el precio de la acción es 5,8 la opción vale 0,54, y si el precio es 5,6 la opción vale 0,47 (aplicando ecuación 4.1). Entonces,

$$(0,54 - 0,47) / (5,8 - 5,6) = 0,35$$

De aquí la *razón de compensación* es de $1/0,35 = 2,86$ opciones por acción en la cartera compensada. En el cuadro 9 se muestran los resultados.

Los gastos de entrada y salida deben sumarse al valor determinado en cuadro 8 para cada límite. En el cuadro 10 se indica el valor total calculado para la opción con cada precio de ejercicio.

Si comparamos los valores calculados en cuadro 7 con los corregidos en cuadro 10 vemos cómo el valor de la opción según el modelo se aproxima al de mercado, e incluso lo supera. Antes pensábamos que la volatilidad implícita en los precios del derecho era mayor que la que estimaba nuestro hipotético inversor. Ahora vemos que, considerando los efectos más importantes de los gastos de transacción, la situación en varios casos es inversa. Esto nos indica la importancia del modelo que se utilice para la valoración de opciones en el análisis de oportunidades de ganancia con transacciones del derecho.

9. Opciones de Celulosa 01/10/91 Gastos Transacción 2%

Precio de ejercicio	Fecha de ejercicio	Valor Rev Lim Sup $\sigma = 105\%$ $i = 18\%$	Razón de Compensac opciones /acciones	Costo de Entrada y Salida		Costo total
				Posición opciones	Ejer- cicio	
4,00	DIC 91	2.11	1.18	0.05	0,03	0,08
5,00	DIC 91	1.51	1.33	0.04	0,04	0,08
6,00	DIC 91	1.06	1.82	0.04	0,05	0,09
7,00	DIC 91	0.74	2.22	0.03	0,06	0,09
8,00	DIC 91	0.51	2.86	0.03	0,07	0,10

10. Opciones de Celulosa 01/10/91 Gastos Transacción 2%

Precio de ejercicio DIC 91	Valor al cierre	Valor Rev Lim Super $\sigma = 105\%$ $i = 18\%$	Costo de Entrada y Salida	Valor Total	
				Lim Sup $\sigma = 105\%$	Opción Lim Inf $\sigma = 89\%$
4,00	2,20	2.11	0,08	2.19	2,10
5,00	1,50	1.51	0,08	1.59	1,45
6,00	1,05	1.06	0,09	1.15	0,98
7,00	0,75	0.74	0,09	0.83	0,66
8,00	0,60	0.51	0.10	0.61	0,46

Hemos visto cuál es la sensibilidad de los valores a los gastos de transacción: al reducirse estos gastos, los valores tienden a concentrarse en una línea, justamente la línea B-S que no considera su existencia. Pero siempre existe algún costo de intermediación, y por tanto una banda de valores del derecho. Los límites de esta banda indican los puntos de conveniencia de utilizar las opciones como medio de inversión o de finan-

ciamiento (para lo cual es preciso considerar las diferencias que existan entre las tasas de prestar o tomar prestado desde el punto de vista del inversor).

7. Resumen de la determinación de valor

Los elementos analizados en los puntos anteriores nos proporcionan el siguiente procedimiento para el cálculo del valor de la opción de compra:

7.1 Calcular C con ecuación 4.1, utilizando σ de ecuación 6.1

7.2 Calcular C con ecuación 4.1, utilizando σ de ecuación 6.2

7.3 Calcular la razón de compensación q

7.3.1 Elegir una medida de cambio de precio (ΔP) relacionada con el valor absoluto del precio del título

7.3.2 Calcular C_1 (según 7.1) para el precio $(A + \Delta P)$

7.3.3 Calcular C_2 (según 7.1) para el precio $(A - \Delta P)$

7.3.4 Calcular cambio en C $dC = C_1 - C_2$

7.3.5 Calcular cambio en P $dP = 2\Delta P$

7.3.6 Calcular razón de compensación $q = 1 / (dC / dP)$

7.4 Determinar situación predominante del análisis (entrada y salida de la posición compensada)

7.5 Calcular costo de entrada y salida, E/S para la situación de 7.4 utilizando ecuación 6.3 en la forma apropiada

7.6 Calcular los límites para el valor total de la opción

$$\text{Límite superior } \bar{C} + E/S \quad \text{Límite inferior } \underline{C} + E/S$$

8. Opción de venta y acciones con dividendos

Con el razonamiento de valoración expuesto, y aplicando formas de cálculo similares, se pueden considerar dos situaciones adicionales: la opción de venta y la opción sobre acciones con dividendos en efectivo.

8.1 Opción de venta. El valor de la opción de venta se determina de modo aproximado equiparando la modalidad americana con la europea presentada en la ecuación 4.1 para la opción de compra. Para esto es suficiente utilizar un arbitraje basado en combinación de opciones, es decir, la formación de réplicas de la opción de venta con opciones de compra, acciones y un préstamo. Es otra forma de posición compensada.

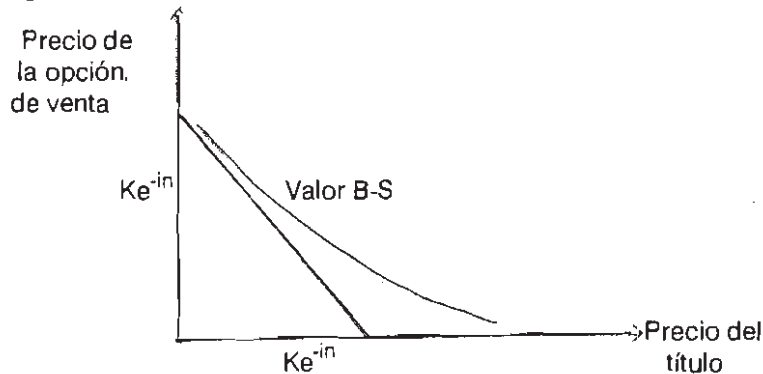
Una cartera con un título y un derecho de venta es equivalente, como inversión, a tener una cartera con un derecho de compra y una inversión a interés de un importe equivalente al valor actual del precio de ejercicio. Esto significa que la opción de venta es replicada por la estrategia que consiste en vender el título, adquirir la titularidad de una opción de compra e invertir a interés el valor actual del precio de ejercicio de la opción. Así llegamos a la relación básica de carteras con opciones:

$$C + Ke^{-in} = V + P \quad \text{Ec (8.1)}$$

El valor de una opción de venta en estas condiciones se determina en función de los otros tres, calculando C con la ecuación 4.1. Se obtiene la línea de comportamiento esperado del mercado con el modelo Black-Scholes, que se muestra en la ilustración 11. La expresión del valor de la opción de venta determinado con ecuación 8.1 es igual a calcular esta opción de forma explícita:

$$V = Ke^{-in} N1[-(b - \sigma\sqrt{n})] - A N1(-b) \quad \text{Ec (8.2)}$$

con el significado visto para la ecuación 4.1.



11. Líneas de valor de la opción de venta

Con esto se obtiene una medida no muy exacta. Como el derecho puede ejercerse en cualquier momento, y el precio del título que condiciona este ejercicio no es constante, hay que considerar infinitas series condicionales, ya que en cada momento se puede ejercer la opción si el valor de este ejercicio es mayor o igual al de no ejercicio. La solución analítica fue desarrollada por Geske & Johnson, en base a un precio crítico del título (P_c), al cual se produce el ejercicio, según la ecuación de límite ya vista, expresada como (ecuación 3.2)

$$V \geq \text{MAX} [K \cdot P, 0]$$

El valor del derecho de venta es una función de la relación entre el precio de ejercicio y el precio del título, ponderados por la probabilidad de la existencia de precios de título por encima y por debajo del precio crítico

en cada momento, según el comportamiento esperado del precio. Las ponderaciones son una suma de series de opciones sobre opciones, de opciones compuestas. (La expresión analítica y su utilización puede verse en Geske & Johnson, 1514/17)

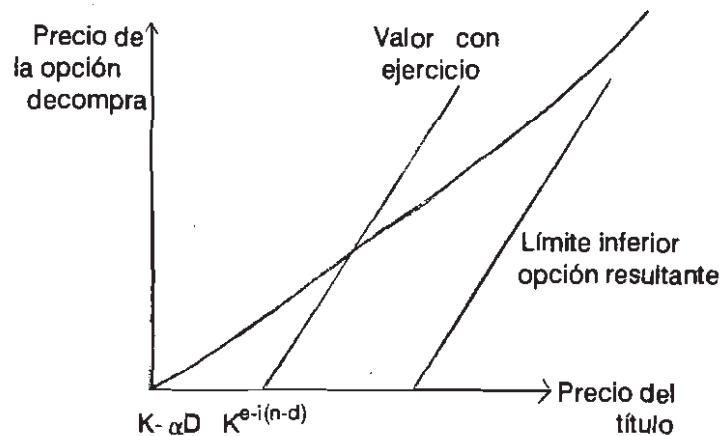
Para fines prácticos, sin embargo, la expresión 8.1 proporciona indicios suficientes sobre las opciones de venta.

8.2 Acciones con dividendos. Cuando existen dividendos o rentas en efectivo es preciso tener en cuenta también la posibilidad de ejercicio temprano en la opción de compra. Si en el momento d se pone a disposición una renta surge la pregunta del titular: ¿conviene ejercer el derecho y cobrar el dividendo, o mantiene su posición abierta hasta el fin del plazo (o hasta que decida negociarla)? Para responder a esto debemos analizar las dos alternativas:

1) Si ejerce el derecho en el momento inmediato anterior a d (puesta a disposición) obtiene un título de precio ex-cupón (P_d), más la proporción de dividendo que no está contenida en el precio con cupón (αD), y debe pagar el precio de ejercicio

2) Si no ejerce el derecho, queda poseedor de una opción de compra de un título con precio P_d . Este derecho puede valuarse con ecuación 4.1, considerando P_d como precio del título, en lugar de A , por el tiempo $(n-d)$.

La situación de decisión se indica en ilustración 12; existe una solución analítica para esta situación (Barone-Adesi & Whaley, 93/95).



12. Momento de decisión sobre dividendo o renta

9. Comentario final

Esta exposición pretendía destacar algunos aspectos para la aplicación de la ecuación de Black-Scholes en valoración de opciones. Para ello se analizaron los fundamentos del valor del derecho de compra y de venta, y se determinaron los efectos de dos situaciones fácticas: cómo influyen los costos de transacción y los dividendos en el comportamiento del valor de la opción para el inversor.

Los elementos expuestos no son nuevos: durante casi 20 años se han sucedido las propuestas de formas de valoración de las opciones. Aquí sólo se resumieron algunos resultados utilizables. La difusión de este modelo de valoración en paquetes de computación para cálculo de inversiones financieras elimina las principales dificultades que pueden aparecer en su utilización. Deja por resolver, sin embargo, el criterio con que deben establecerse las predicciones de base e interpretarse los resultados.

Se ha intentado explicar el alcance de la medición de las variables que utiliza el modelo, y la validez de la línea de valoración que subyace en el mismo. Del mismo resultan indicadores tales como el precio que debería prevalecer para la opción y su contraparte, la volatilidad del título implícita en el precio vigente.

Esta última hace las veces de la tasa de rendimiento implícita en el precio de un título: permite formular juicios sobre la magnitud de la disparidad de las expectativas del inversor respecto a las que están reflejadas en el precio de mercado.

La complejidad de cualquier valoración financiera, y en especial en el caso de títulos derivados, no permite una utilización automática de los resultados de los modelos de valoración disponibles. Estos proporcionan indicaciones, que son útiles a condición de conocer los supuestos de su formulación.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ALENDE, Emilio, *Operaciones a prima: una nueva alternativa*, Revista Instituto Argentino de Mercado de Capitales, 1986, v.5, 69/73
- APREDA, Rodolfo, *Obligaciones negociables, bonos y opciones*, Club de Estudio, Buenos Aires, 1988
- BARONE-ADESI, Giovanni & WHALEY, Robert, *The valuation of American call options and the expected ex-dividend stock price decline*, Journal of Financial Economics, 1986, v.17, 91/111
- BREALEY, Richard y MYERS, Stewart, *Principios de finanzas corporativas*, Mc Graw Hill, Madrid, 1988
- BLACK, Fischer & SCHOLES, Myron, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 1973, v.81, 637/654

- CAES, Charles J., *Selling covered calls: the safest game on the options market*, Liberty Hall, Philadelphia, 1990
- FIGLEWSKI, Stephen, *Options arbitrage in imperfect markets*, Journal of Finance, 1989, v.44, 1289/1311
- FORNERO, Ricardo, *Una nota sobre futuros y opciones*, Cuadernos de Finanzas 5, Sociedad Argentina Docentes en Administración Financiera (SADAF), 1989
- FORNERO, Ricardo, *Valoración de opciones sobre instrumentos financieros*, Disertaciones en X Jornadas Nacionales y I Latinoamericanas de Administración Financiera, Córdoba, 1990, 87/118
- GESKE, Robert, *A note on an analytical formula for unprotected American call options on stocks with known dividends*, Journal of Financial Economics, 1979, v.7, 375/380
- GESKE, Robert & JOHNSON, H.E., *The American put option valued analytically*, Journal of Finance, 1984, v.39, 1511/24
- GESKE, Robert & ROLL, Richard, *On valuing American call options with the Black-Scholes European formula*, Journal of Finance, 1984, v.39, 443/455
- GILSTER, John & LEE, William, *The effects of transaction costs and different borrowing and lending rates on the option pricing model: a note*, Journal of Finance, 1984, v.39, 1215/21
- GORDON DAVIS, Jaime, *Operaciones a prima y opciones*, Instituto Argentino de Mercado de Capitales, 1987
- HULL, John, *Options, futures and other derivative securities*, Prentice Hall, New Jersey, 1989
- JARROW, Robert & RUDD, Andrew, *Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes*, Journal of Financial Economics, 1982, v.10, 347/369
- LELAND, Hayne, *Option pricing and replication with transactions costs*, Journal of Finance, 1985, v.40, 1283/1301
- PERRAKIS, Stylianos, *Option bounds in discrete time: extensions and the pricing of the american put*, Journal of Business, 1986, v.59, 119/141
- PERRAKIS, Stylianos & RYAN, Peter, *Option pricing bounds in discrete time*, Journal of Finance, 1984, v.39, 519/525 (Existe traducción en Cuadernos de Finanzas 6, SADAF, 1989)
- RITCHEN, Peter & KUO, Shyanjaw, *Option bounds with finite revision opportunities*, Journal of Finance, 1988, v.43, 301/308

- ROLL, Richard, *An analytic valuation formula for unprotected American call options on stocks with known dividends*, 1977, *Journal of Financial Economics*, v.5, 251/258
- RUBINSTEIN, Mark, *A simple formula for the expected rate of return of an option over a finite holding period*, *Journal of Finance*, 1984, v.39, 1503/09
- SMITH, Clifford, *Option pricing: a review*, *Journal of Financial Economics*, 1976, v.3, 3/51
- WHALEY, Robert, *On the valuation of American call options on stocks with known dividends*, 1981, *Journal of Financial Economics*, v.9, 207/211